Учебные пособия АНО «Издательский дом «Народное образование»
допущены к использованию в общеобразовательных учреждениях
Приказом Минобрнауки России № 16 от 16.01.2012

Под редакцией Д.А. Мальцева

МАТЕМАТИКА
9 класс
ОГЭ 2018
РЕШЕБНИК

✓ *теория вероятности*
✓ *решения задач тестов ОГЭ*
✓ *геометрический тренинг*

Издатель Мальцев Д.А.
Ростов-на-Дону

Народное образование
Москва
2018

Содержание

От авторов

Данная книга состоит из трёх параграфов. В §1 приведены решения задач по теории вероятности — наиболее сложного для восприятия школьниками раздела учебной программы. Отметим, что фактически этот параграф является самостоятельным и полноценным пособием по решению задач на тему «Теория вероятности». Многие задачи данного параграфа выходят за рамки того, что может встретиться выпускникам экзамене, но большинство сегодняшних школьников ещё не раз встретятся с подобными задачами при дальнейшем обучении в ВУЗе или колледже. Поэтому все приведённые задачи будут весьма полезны при изучении темы «Теория вероятности».

В §2 содержится основной материал данного пособия — решения заданий второй части тестов книги «Математика. 9 класс. ОГЭ 2018».

В §3 дана подборка геометрических задач (и их решения), которые составлены по мотивам заданий №13 тестов вышеуказанной книги.

Основная цель данного пособия — помочь ученику, желающему научиться решать задания второй части выпускного экзамена по математике. Поэтому авторы старались писать решения подробно, в стиле беседы с читателем. Хотя на экзамене при оформлении решений достаточно меньшей степени подробности, чем выбрана авторами, вы вполне можете «взять на вооружение» и с успехом использовать некоторые из приёмов оформления решений, используемых в этой книге. Например, ключевые слова и фразы, наподобие «следовательно», «таким образом», «так как..., то...», помогут вам более упорядоченно излагать свои мысли. И вполне возможно, что вследствие этого вы станете совершать меньшее количество ошибок и быстрее приходить к правильному ответу.

Данное пособие поможет ученикам приобрести устойчивые навыки в решении ряда заданий и существенно повысить уровень математической культуры. Это, в свою очередь, будет способствовать не только успешной сдаче последующих экзаменов, но также окажет неоценимую помощь в дальнейшем обучении — вне зависимости от выбранного колледжа или ВУЗа и выбранной специальности.

Желаем вам успехов!

§ 2. Решения задач учебно-тренировочных тестов

Тест №1

$\boxed{21}$ Решите уравнение $(5x+6)^4+5(5x+6)^2-6=0$.

Решение.

Сделав замену неизвестного $t=(5x+6)^2$, получим уравнение $t^2+5t-6=0$. Корнями данного уравнения являются $t=1$ и $t=-6$. Возвращаясь к неизвестному x, получаем: $(5x+6)^2=1$ и $(5x+6)^2=-6$. Уравнение $(5x+6)^2=-6$ не имеет корней (т.к. $(5x+6)^2\geqslant 0$ для всех x). Уравнение $(5x+6)^2=1$ равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}5x+6=1\\5x+6=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x=-5\\5x=-7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-1{,}4\end{array}\right.$$

Ответ: $-1{,}4; -1$

$\boxed{22}$ Первые 120 км пути автомобиль ехал со скоростью 75 км/ч, следующие 90 км — со скоростью 60 км/ч, а затем 190 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Найдём время, затраченное автомобилем на каждый из участков пути:
для первых 120 км время в пути равно $\dfrac{120}{75}=1{,}6$ часа;
для следующих 90 км время в пути равно $\dfrac{90}{60}=1{,}5$ часа;
для последних 190 км время в пути равно $\dfrac{190}{100}=1{,}9$ часа.

Так как общее время в пути составило $1{,}6+1{,}5+1{,}9=5$ часов, а длина всего пути равна $120+90+190=400$ км, то средняя скорость автомобиля на протяжении всего пути равна $\dfrac{400}{5}=80$ км/ч.

Ответ: 80

$\boxed{23}$ Постройте график функции $y=x^2-|5x+2|$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Решение.

Снимем знак модуля в выражении, определяющем данную в условии функцию: $5x+2<0$ при $x<-0{,}4$, $5x+2\geqslant 0$ при $x\geqslant -0{,}4$, поэтому

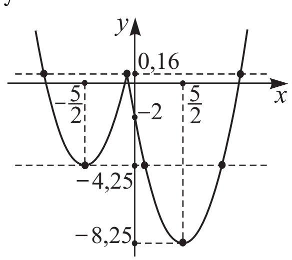
$$x^2-|5x+2|=\begin{cases} x^2+5x+2, \text{ при } x<-0{,}4\\ x^2-5x-2, \text{ при } x\geqslant -0{,}4.\end{cases}$$

Таким образом, при $x<-0{,}4$ графиком данной в условии функции является часть параболы $y=x^2+5x+2$, а при $x\geqslant -0{,}4$ графиком этой функции является часть параболы $y=x^2-5x-2$.

Вершиной параболы $y=x^2+5x+2$ является точка с абсциссой $x=-\dfrac{5}{2}$ и ординатой $y=\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2+5\cdot\left(-\dfrac{5}{2}\right)+2=2-\dfrac{25}{4}=-4{,}25$. Вершиной параболы $y=x^2-5x-2$ является точка с абсциссой $x=\dfrac{5}{2}$ и ординатой $y=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-5\cdot\dfrac{5}{2}-2=-\dfrac{25}{4}-2=-8{,}25$.

В особой точке $x=-0{,}4$ значение функции $y=x^2-|5x+2|$ равно $(-0{,}4)^2+0=0{,}16$.

Эскиз графика функции $y=\begin{cases} x^2+5x+2, \text{ при } x<-0{,}4\\ x^2-5x-2, \text{ при } x\geqslant -0{,}4\end{cases}$ изображён на данном ниже рисунке.



Из этого рисунка следует, что прямая $y=m$ имеет три общие точки с графиком функции $y=x^2-|5x+2|$ только при $m=0{,}16$ и $m=-4{,}25$.

Ответ: $m=-4{,}25$, $m=0{,}16$

24 В треугольнике ABC углы B и C равны 48° и 87° соответственно. Найдите длину стороны BC, если радиус описанной окружности треугольника ABC равен $3\sqrt{2}$.

Решение.

Для нахождения длины BC найдём угол A и воспользуемся теоремой

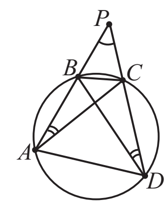
синусов: $\dfrac{BC}{\sin\angle A}=2R$, где R — радиус описанной окружности $\triangle ABC$. Из условия имеем: $\angle A=180^\circ-\angle B-\angle C=180^\circ-48^\circ-87^\circ$, $\angle A=45^\circ$, $2R=6\sqrt{2}$.

Таким образом, $BC=2R\cdot\sin\angle A=6\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=6$. *Ответ:* 6

25 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, P — точка пересечения продолжений сторон AB и CD. Докажите, что $AP\cdot BP=CP\cdot DP$.

Решение.

Заметим, что $\angle BAC=\angle BDC$ — как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, см. рисунок.



Так как в треугольниках APC и DPB угол общий, а угол A треугольника APC равен углу D треугольника DPB, то $\triangle APC$ подобен $\triangle DPB$ (по двум равным углам).

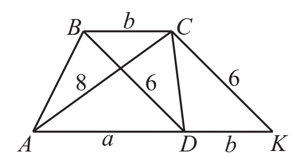
Из подобия треугольников APC и DPB следует, что $\dfrac{AP}{DP}=\dfrac{CP}{BP}$. Отсюда (по правилу пропорции) получаем: $AP\cdot BP=CP\cdot DP$, что и требовалось доказать.

26 Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 6 и 8, а средняя линия равна 5.

Решение.

1) Пусть $ABCD$ — данная в условии трапеция, где $AC=8$, $BD=6$. Пусть также $AD=a$, $BC=b$.

Через точку C проведём прямую, параллельную диагонали BD, и точку пересечения этой прямой с прямой AD обозначим через K, см. данный ниже рисунок.



Четырёхугольник $BCKD$ является параллелограммом ($BC \parallel DK$ – так как $ABCD$ трапеция, $CK \parallel BD$ – по построению). Следовательно, $CK = BD = 6$, $DK = BC = b$. Для длины отрезка AK имеем следующее равенство: $AK = AD + DK = a + b$. Так как сумма длин оснований трапеции равна удвоенной средней линии, которая по условии равна 5, то $a + b = 2 \cdot 5 = 10$.

2) Заметим, что площадь треугольника ACK равна площади трапеции $ABCD$. В самом деле, $S_{ACK} = \frac{1}{2} AK \cdot CH = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$, где CH – высота $\triangle ACK$. Но высота треугольника ACK является одновременно и высотой трапеции $ABCD$, поэтому $\frac{1}{2}(a + b) \cdot h = S_{ABCD}$.

3) Из пункта 2) следует, что нам достаточно найти площадь треугольника ACK, в котором нам известны длины всех трёх сторон: $AC = 8$, $CK = 6$, $AK = 10$. Для этого можно использовать формулу Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c – длины сторон треугольника, $p = a + b + c$. Но и этих вычислений можно избежать, если заметить, что $AC^2 + CK^2 = 8^2 + 6^2 = 10^2 = AK^2$. Из этого равенства согласно обратной теореме Пифагора следует, что $\triangle ACK$ – прямоугольный треугольник с катетами AC и CK, поэтому $S_{ACK} = \frac{1}{2} AC \cdot CK = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$.

Ответ: 24

Тест №3

$\boxed{21}$ Решите неравенство $(15x - 4)^2 \geqslant (4x - 15)^2$.

Решение.

Преобразуем данное в условии неравенство, используя формулу разности квадратов:

$(15x - 4)^2 \geqslant (4x - 15)^2$, $(15x - 4 - 4x + 15) \cdot (15x - 4 + 4x - 15) \geqslant 0$,

$(11x + 11) \cdot (19x - 19) \geqslant 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) \geqslant 0$.

По методу интервалов находим, что решением неравенства $(x + 1)(x - 1) \geqslant 0$ являются $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

$\boxed{22}$ Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 70 км/ч, следующие пять часов – со скоростью 90 км/ч, а затем один час – со скоростью

60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

За первые два часа автомобиль проехал $2 \cdot 70 = 140$ км, за следующие 5 часов автомобиль проехал $5 \cdot 90 = 450$ км, а за последний час – 60 км. Длина всего пути, пройденного автомобилем, равна $140 + 450 + 60 = 650$ км, а время, затраченное на этот путь, составило $2 + 5 + 1 = 8$ часов. Поэтому средняя скорость автомобиля на протяжении всего путь равна $\frac{650 \text{ км}}{8 \text{ ч}} = 81{,}25$ км/ч.

Ответ: 81,25

$\boxed{23}$ Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2 - 6x)(x^2 + 5x - 14)}{x^2 + 7x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

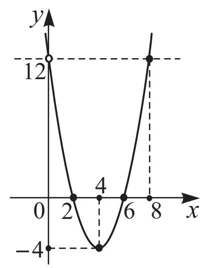
Сначала преобразуем выражение, определяющее данную в условии функцию. Имеем: $x^2 - 6x = x(x - 6)$, $x^2 + 7x = x(x + 7)$; корнями квадратного трёхчлена $x^2 + 5x - 14$ являются $x = 2$ и $x = -7$, поэтому $x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)$. Следовательно, $\dfrac{(x^2 - 6x)(x^2 + 5x - 14)}{x^2 + 7x} = \dfrac{x(x-6)(x-2)(x+7)}{x(x+7)} = (x - 6)(x - 2) = x^2 - 8x + 12$ при всех $x \neq 0$, $x \neq -7$.

Итак, графиком данной в условии функции является парабола $y = x^2 - 8x + 12$ с двумя выколотыми точками, абсциссы которых $x = 0$ и $x = -7$ (при $x = 0$ и $x = -7$ данная в условии функция не определена).

Вершиной параболы $y = x^2 - 8x + 12$ является точка с абсциссой $x = \frac{8}{2} = 4$ и ординатой $y = 4^2 - 8 \cdot 4 + 12 = -4$. Вычислим ординаты двух выколотых точек: $y(0) = 12$, $y(-7) = (-7)^2 - 8 \cdot (-7) + 12 = 117$. На рисунке (см. на следующей странице) изображён эскиз графика этой параболы с выколотой точкой $x = 0$, $y = 12$, вторая выколотая точка $x = -7$, $y = 117$ не входит в границы рисунка.

Из сказанного выше следует, что прямая $y = m$ имеет ровно одну общую точку с графиком данной в условии функции при $m = -4$, $m = 12$ и $m = 117$.

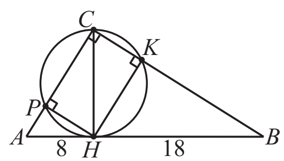
Ответ: $-4; 12; 117$



$\boxed{24}$ В прямоугольном треугольнике ABC высота CH делит гипотенузу AB на отрезки $AH = 8$ и $BH = 18$. Окружность, построенная на отрезке CH, как на диаметре, пересекает стороны AC и BC в точках P и K. Найдите длину отрезка PK.

Решение.

1) Так как углы CPH и CKH вписаны в окружность и опираются на её диаметр, то эти углы равны $90°$, см. данный ниже рисунок.



2) Поскольку в четырёхугольнике $CKHP$ углы при вершинах P, C и K прямые, то $\angle PHK = 360° - 90° \cdot 3 = 90°$. Следовательно, $CKHP$ – прямоугольник (т.к. все углы прямые).

3) В любом прямоугольнике диагонали равны, поэтому $PK = CH$, и нам достаточно найти длину высоты CH. По свойству высоты прямоугольного треугольника имеем: $CH^2 = AH \cdot BH = 8 \cdot 18 = 144$, откуда $CH = 12$.

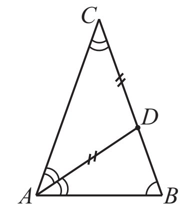
Ответ: 12

$\boxed{25}$ В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB проведена биссектриса AD. Оказалось, что $CD = AD$. Докажите, что при этом будет выполнено следующее равенство: $AB^2 = BC \cdot BD$.

Решение.

Так как $AD = CD$, то $\angle CAD = \angle ACD$ – как углы при основании равнобедренного треугольника. А поскольку AD – биссектриса, то

$\angle CAD = \angle BAD$. Поэтому $\angle ACD = \angle BAD$, см. данный ниже рисунок.



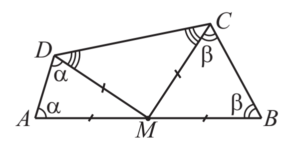
Заметим, что у треугольников ABD и CAB равны углы при вершинах A и C ($\angle BAD = \angle ACD$), а угол при вершине B общий. Следовательно, эти треугольники подобны (по двум равным углам).

Из подобия треугольников ABD и CAB имеем: $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{AB}{BC}$. Отсюда по правилу пропорции получаем: $BD \cdot BC = AB^2$, что и требовалось доказать.

$\boxed{26}$ Середина стороны AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AB, если $CD = 3$, а углы C и D этого четырёхугольника равны $116°$ и $109°$ соответственно.

Решение.

1) Пусть M – середина стороны AB, и пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Так как по условию точка M равноудалена от всех вершин, т.е. $MA = MD = MC = MB$, то $\angle DAM = \angle ADM = \alpha$ и $\angle CBM = \angle BCM = \beta$ – как углы при основаниях равнобедренных треугольников ADM и BCM, см. данный ниже рисунок.



2) По условию $\angle ADC = 109°$, $\angle BCD = 116°$. Составим уравнение для нахождения α и β, используя равенство $\angle CDM = \angle DCM$. Имеем: $\angle CDM = \angle ADC - \angle ADM = 109° - \alpha$, $\angle DCM = \angle BCD - \angle BCM = 116° - \beta$, $109° - \alpha = 116° - \beta$, $\beta - \alpha = 7°$.

3) Второе уравнение для нахождения α и β получим из равенства $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ (сумма всех внутренних углов четырёхугольника равна $360°$): $\alpha + \beta + 116° + 109° = 360°$, $\alpha + \beta = 135°$. Итак, для определения α и β имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \beta-\alpha=7^\circ \\ \beta+\alpha=135^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta-\alpha=7^\circ \\ 2\beta=142^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=64^\circ \\ \beta=71^\circ. \end{cases}$$

4) В равнобедренном треугольнике CDM вычислим угол при вершине M, а затем, зная длину CD (по условию $CD = 3$), вычислим длину боковой стороны DM. Имеем: $\angle CDM = \angle ADC - \alpha = 109^\circ - 64^\circ = 45^\circ$. Так как угол при основании равнобедренного треугольника CDM равен 45°, то $\angle CMD = 180^\circ - 2\cdot 45^\circ = 90^\circ$, т.е. $\triangle CDM$ – прямоугольный. Следовательно, $DM = \dfrac{CD}{\sqrt{2}}$, а искомая длина стороны AB равна $2DM = 2\cdot\dfrac{CD}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.

Ответ: $3\sqrt{2}$

Тест №5

$\boxed{21}$ Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{3-x}{3+(1-2x)^2} \geqslant 0, \\ 5-18x \leqslant 21-14x \end{cases}$

Решение.

Так как $3+(1-2x)^2 \geqslant 0$ при любых значениях x, то первое неравенство данной в условии системы равносильно неравенству $3-x \geqslant 0$, $3 \geqslant x$, т.е. его решением является промежуток $(-\infty; 3]$.

Решим второе неравенство данной системы: $5-18x \leqslant 21-14x \Leftrightarrow 5-21 \leqslant 18x-14x$, $-16 \leqslant 4x \Leftrightarrow -4 \leqslant x$.

Находя пересечение промежутков $(-\infty;3]$ и $[-4;+\infty)$, являющихся решениями 1-го и 2-го неравенств данной в условии системы, получаем, что решением этой системы является промежуток $[-4;3]$.

Ответ: $[-4;3]$

$\boxed{22}$ Работу по обновлению фасада здания первый маляр выполнит на один день быстрее, чем второй, и на 4 дня быстрее, чем третий. Второй и третий маляры, работая вместе, выполнят эту работу за то же время, что и первый маляр, работая один. За сколько дней выполнит эту работу первый маляр?

Решение.

Примем весь объём работы за 1. Пусть первый маляр выполняет эту работу за x дней. Тогда, по условию, второй маляр выполняет эту работу

за $x+1$ день, а третий – за $x+4$ дня. Объёмы работ, выполняемых за один день первым, вторым и третьим малярами, равны соответственно $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{1}{x+4}$. Из условия следует, что второй и третий маляры вместе за день выполняют такой же объём работы, как и первый, работая один. Поэтому имеем уравнение: $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{1}{x}$. Решим это уравнение: $\dfrac{x+4+x+1}{(x+1)\cdot(x+4)}=\dfrac{1}{x}$, $(2x+5)\cdot x=(x+1)\cdot(x+4)$, $x^2=4 \Rightarrow x=2$.

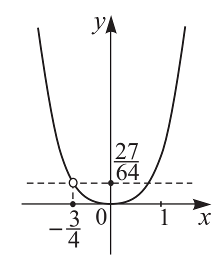
Ответ: 2

$\boxed{23}$ Постройте график функции $y=\dfrac{(4x^3+3x^2)|x|}{4x+3}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Преобразуем выражение, определяющее данную в условии функцию: $\dfrac{4x^3+3x^2}{4x+3}=\dfrac{x^2\cdot(4x+3)}{4x+3}=x^2$, если $4x+3\neq 0$.

Таким образом, при любом $x\neq -\dfrac{3}{4}$ значение данной в условии функции совпадает со значением функции $y=x^2\cdot|x|$, или, что то же самое, $y=|x^3|$. Поэтому графиком этой функции является график функции $y=|x^3|$ с выколотой точкой $x=-\dfrac{3}{4}$, $y=\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}$ (при $x=-\dfrac{3}{4}$ данная в условии функция не определена). График функции $y=|x^3|$ получается из графика функции $y=x^3$ симметричным отражением относительно оси Ox той части графика, которая расположена ниже оси Ox. Эскиз этого графика изображён на данном ниже рисунке.

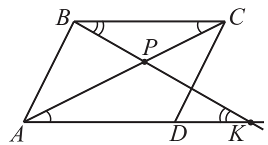


Из рисунка следует, что прямая $y=m$ имеет с графиком данной в условии функции ровно одну общую точку при $m=0$ и $m=\dfrac{27}{64}$.

24 На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ взята точка P, прямые BP и AD пересекаются в точке K. Найдите отношение $AK:DK$, если известно, что $AP:CP=5:3$.

Решение.

Заметим, что $\angle PAK = \angle PCB$, $\angle AKP = \angle CBP-$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых, см. данный ниже рисунок. Поэтому треугольники AKP и CBP подобны (по двум равным углам).



Из подобия треугольников AKP и CBP следует, что $\dfrac{AK}{BC}=\dfrac{AP}{CP}=\dfrac{5}{3}$ ($AP:CP=5:3-$ по условию). Следовательно, $AK=\dfrac{5}{3}BC=\dfrac{5}{3}AD$ ($BC=AD-$ как противоположные стороны параллелограмма). Отсюда находим, что $AD=\dfrac{3}{5}AK$, $DK=AK-AD=AK-\dfrac{3}{5}AK=\dfrac{2}{5}AK$. Из равенства $DK=\dfrac{2}{5}AK$ получаем, что $AK:DK=5:2$.

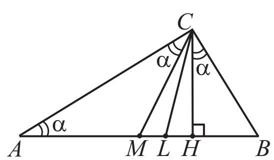
Ответ: $5:2$

25 Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведёнными из этой же вершины.

Решение.

Пусть $ABC-$ прямоугольный треугольник с прямым углом C, а отрезки $CH, CL, CM-$ соответственно высота, биссектриса и медиана этого треугольника.

1) Величину угла BAC обозначим через α, тогда $\angle ACH=90^\circ-\alpha$, $\angle BCH=90^\circ-\angle ACH=\alpha$, см. данный ниже рисунок.



2) По свойству медианы к гипотенузе прямоугольного треугольника

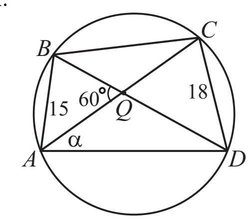
имеем: $CM=AM$. Отсюда следует, что $\angle ACM=\angle CAM=\alpha$ (как углы при основании равнобедренного треугольника ACM).

Из пунктов 1) и 2) следует, что $\angle BCH=\angle ACM$. Так как $CL-$ биссектриса угла C, то $\angle ACL=\angle BCL$. Из последних двух равенств следует, что $\angle MCL=\angle ACL-\angle ACM=\angle BCL-\angle BCH=\angle HCL$. Итак, нами доказано, что $\angle MCL=\angle HCL$, т.е. $CL-$ биссектриса угла MCH, что и требовалось доказать.

26 Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB=15$ и $CD=18$ вписан в окружность. Диагонали этого четырёхугольника пересекаются в точке Q, причём $\angle AQB=60^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной вокруг четырёхугольника $ABCD$.

Решение.

1) Пусть $\angle CAD=\alpha$, $\angle BDA=\delta$, тогда $\angle BQA=\alpha+\delta$ (угол BQA равен сумме углов CAD и BDA как внешний угол треугольника ADQ) см. данный ниже рисунок.



По условию $\angle BQA=60^\circ$, и, значит, $\alpha+\delta=60^\circ$.

2) Пусть $R-$ искомый радиус описанной окружности четырёхугольника $ABCD$. Из треугольников ABD и CDA по теореме синусов имеем: $AB=2R\cdot\sin\delta$, $CD=2R\cdot\sin\alpha$. Вспомнив, что $\alpha+\delta=60^\circ$ (см. пункт 1), выразим δ через α и получим выражение для $\sin\delta$ по формуле синуса разности: $\sin\delta=\sin(60^\circ-\alpha)=\sin 60^\circ\cdot\cos\alpha-\cos 60^\circ\cdot\sin\alpha$. Отсюда, учитывая условия ($AB=15$, $CD=18$), получаем следующую систему для неизвестных R и α:

$$\begin{cases} 2R\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\dfrac{1}{2}\sin\alpha\right)=15 \\ 2R\cdot\sin\alpha=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\cdot R\cdot\cos\alpha-R\cdot\sin\alpha=15 \\ R\cdot\sin\alpha=9. \end{cases}$$

Подставляя $R\cdot\sin\alpha=9$ в первое уравнение системы, имеем:

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cdot R\cdot\cos\alpha=24 \\ R\cdot\sin\alpha=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R\cdot\cos\alpha=8\sqrt{3} \\ R\cdot\sin\alpha=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2\cdot\cos^2\alpha=\left(8\sqrt{3}\right)^2 \\ R^2\cdot\sin^2\alpha=9^2 \end{cases}$$

Суммируя правые и левые части уравнений последней системы, получаем, что $R^2\cdot(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=273$, $R^2=273$, $R=\sqrt{273}$.

Ответ: $\sqrt{273}$

Тест №7

$\boxed{21}$ Найдите $f(7)$, если $f(x-4)=7^{14-x}$.

Решение.

Так как $x-4=7 \Leftrightarrow x=11$, то чтобы вычислить $f(7)$, достаточно в выражение для $f(x-4)$ подставить в качестве аргумента $x=11$. Поэтому имеем: $f(7)=7^{14-11}=7^3=343$.

Ответ: 343

$\boxed{22}$ Первый наборщик набирает за час 5 страниц текста, второй — 6 страниц, а третий — 7 страниц. Определите, по сколько страниц текста нужно отдать для набора каждому из них, если требуется, чтобы весь текст, объём которого 216 страниц, был набран как можно быстрее.

Решение.

Весь текст будет набран максимально быстро, если в работе ни одного из наборщиков не будет «простоя», т.е. все три наборщика закончат работу одновременно. Так как в сумме за час они набирают $5+6+7=18$ страниц, то на набор 216 страниц (без простоев в работе) уйдёт $\dfrac{216}{18}=12$ часов. Для того, чтобы каждый из наборщиков работал втечении 12 часов, необходимо первому отдать в набор $5\cdot12=60$, второму — $6\cdot12=72$, а третьему — $7\cdot12=84$ страниц текста.

Ответ: $60, 72, 84$

$\boxed{23}$ Постройте график функции $y=\dfrac{1}{2}\left(\left|2x-\dfrac{1}{2x}\right|+2x+\dfrac{1}{2x}\right)$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

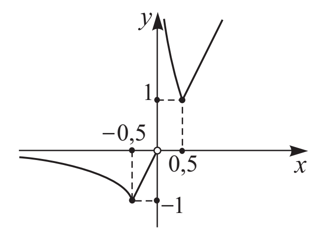
Решение.

Сначала преобразуем выражение, определяющее данную в условии функцию. Так как $2x-\dfrac{1}{2x}\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x^2-1}{2x}\geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{(2x-1)(2x+1)}{2x}\geqslant 0 \Leftrightarrow$

$x\in[-0{,}5;0)\cup[0{,}5;+\infty)$, то снимая знак модуля в выражении $\left|2x-\dfrac{1}{2x}\right|$, для данной в условии функции имеем:

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(2x-\dfrac{1}{2x}+2x+\dfrac{1}{2x}\right)=2x, & \text{при } x\in[-0{,}5;0)\cup[0{,}5;+\infty)\\[2mm] \dfrac{1}{2}\left(-2x+\dfrac{1}{2x}+2x+\dfrac{1}{2x}\right)=\dfrac{1}{2x}, & \text{при } x\in(-\infty;-0{,}5)\cup(0;0{,}5).\end{cases}$$

Таким образом, на промежутках $[-0{,}5;0)$ и $[0{,}5;+\infty)$ графиком данной в условии функции являются участки прямой $y=2x$, а на промежутках $(-\infty;-0{,}5)$ и $(0;0{,}5)$ — участки гиперболы $y=\dfrac{1}{2x}$. Эскиз этого графика изображён на данном ниже рисунке.



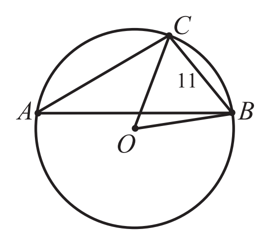
Из построенного графика следует, что прямая $y=m$ имеет ровно одну общую точку с этим графиком только при $m=-1$ и $m=1$.

Ответ: $-1; 1$

$\boxed{24}$ Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как $3:5:10$. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон равна 11.

Решение.

Пусть ABC — данный треугольник, точка O — центр описанной окружности этого треугольника, причём AB — большая, а BC — меньшая из его сторон (тогда по условию $BC=11$), см. данный ниже рисунок.



Заметим, что отношение длин дуг, стягиваемых хордами $\smile{BC}$, $\smile{AC}$ и $\smile{AB}$, равно отношению градусных мер этих дуг. С другой стороны, отношение градусных мер дуг $\smile{BC}$, $\smile{AC}$ и $\smile{AB}$ равно отношению градусных мер углов A, B и C, опирающихся на эти дуги. Поэтому $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 5 : 10$. Пусть $\angle A = 3x$, тогда $\angle B = 5x$, $\angle C = 10x$, а поскольку $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, то $3x + 5x + 10x = 180°$, $x = 10°$. Отсюда имеем: $\angle A = 3x = 30°$, $\angle BOC = 2\angle A = 60°$.

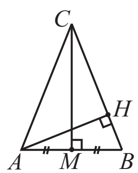
Так как $\angle BOC = 60°$ и $BO = CO$, то треугольник BOC является равносторонним. Следовательно, $BO = BC = 11$.

Ответ: 11

25 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB проведена высота AH. Докажите, что $AB^2 = 2\,BC \cdot BH$.

Решение.

Пусть M − середина стороны AB. Так как $AC = BC$, то медиана CM является и высотой, см. данный ниже рисунок.



Заметим, что треугольники ABH и CBM подобны по двум равным углам: $\angle AHB = \angle CMB = 90°$, а угол при вершине B у этих треугольников общий.

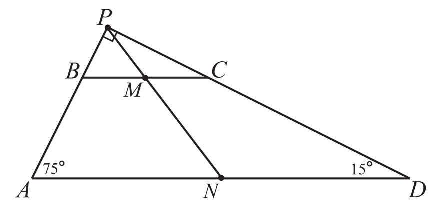
Из подобия треугольников ABH и CBM следует, что $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BH}{BM}$. Отсюда по правилу пропорции имеем: $AB \cdot BM = BC \cdot BH$. Подставляя в это равенство $BM = \dfrac{1}{2}AB$, получаем: $\dfrac{1}{2}AB^2 = BC \cdot BH$, $AB^2 = 2BC \cdot BH$, что и требовалось доказать.

26 Углы при одном из оснований трапеции равны $75°$ и $15°$, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 15 и 7. Найдите меньшее из оснований этой трапеции.

Решение.

1) Пусть $ABCD$ − данная трапеция, причём $\angle A = 75°$, $\angle D = 15°$, точки M и N − середины оснований BC и AD, P − точка пересечения

прямых AB и CD, см. данный ниже рисунок. Длины оснований BC и AD обозначим через b и a соответственно. Из треугольника APD имеем: $\angle APD = 180° - \angle A - \angle D = 90°$.



Заметим, что поскольку точки P, M, N лежат на одной прямой (этот факт мы докажем в самом конце решения), то $MN = PN - PM$. А поскольку отрезки PN и PM являются медианами прямоугольных треугольников APD и BPC, то $PN = \dfrac{1}{2}AD$, $PM = \dfrac{1}{2}BC$. Отсюда получаем: $MN = \dfrac{1}{2}(AD - BC) = \dfrac{1}{2}(a - b)$.

2) Так как отрезками, соединяющими середины противоположных сторон трапеции, являются отрезок MN и средняя линия трапеции, равные $\dfrac{1}{2}(a-b)$ и $\dfrac{1}{2}(a+b)$ соответственно, то $\dfrac{1}{2}(a-b) = 7$, $\dfrac{1}{2}(a+b) = 15$. Вычитая из равенства $\dfrac{a+b}{2} = 15$ равенство $\dfrac{a-b}{2} = 7$, находим, что $b = 8$.

3) Для полноты решения остаётся лишь доказать, что точки P, M, N действительно лежат на одной прямой. Заменим это утверждение на цепочку равносильных ему утверждений: точка N лежит на прямой PM $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ прямая PM пересекает прямую AD в точке N.

Для доказательства последнего из этих утверждений обозначим через N' точку пересечения прямой PM с прямой AD и покажем, что точки N' и N совпадают.

В самом деле, по теореме Фалеса имеем: $\dfrac{AN'}{DN'} = \dfrac{BM}{CM} = 1$, поэтому $AN' = DN'$, т.е. N' − середина AD и, значит, совпадает с точкой N, ч.т.д.

Любителям геометрии. Для любой трапеции $ABCD$ справедливо более сильное утверждение, чем доказанное выше. А именно, если K − точка пересечения диагоналей трапеции, то все четыре точки P, M, N и K лежат на одной прямой.

В самом деле, если через K_1 и K_2 обозначить точки пересечения диагоналей AC и BD с отрезком MN, то из подобия $\triangle CMK_1$ и $\triangle ANK_1$

имеем: $\dfrac{MK_1}{NK_1} = \dfrac{CM}{AN}$; а из подобия $\triangle BMK_2$ и $\triangle DNK_2$ имеем: $\dfrac{MK_2}{NK_2} = \dfrac{BM}{DN}$. Так как $CM = BM$ и $AN = DN$, то справедливо равенство $\dfrac{MK_1}{NK_1} = \dfrac{MK_2}{NK_2}$, из которого следует, что точки K_1 и K_2 совпадают.

Тест №9

21 Найдите значение выражения $\dfrac{p(a)}{p(8-a)}$, если $p(x) = \dfrac{x(8-x)}{x-4}$.

Решение.

Подставляя в заданную условием функцию в качестве аргумента $x = a$ и $x = 8 - a$, получаем:

$$p(a) = \frac{a(8-a)}{a-4};\ p(8-a) = \frac{(8-a)\big(8-(8-a)\big)}{(8-a)-4} = \frac{(8-a)a}{4-a}.$$

Найдём отношение $\dfrac{p(a)}{p(8-a)}$:

$$\frac{p(a)}{p(8-a)} = \frac{a(8-a)}{a-4} : \frac{(8-a)a}{4-a} = \frac{4-a}{a-4} = \frac{-(a-4)}{a-4} = -1.$$

Ответ: -1

22 Влажность свежескошенной травы составила 70%. Сколько кг сена, влажность которого 20%, получится из 6 тонн этой травы?

Решение.

Так как влажность травы равна 70%, то содержание в ней «сухого вещества» (всё, кроме воды) равно 30%. Поэтому в 6 тоннах этой травы содержится $0{,}3 \cdot 6 = 1{,}8$ тонн «сухого вещества». Влажность сена должна составить 20%, т.е. 1,8 тонн «сухого вещества» должны составить 80% массы сена. Отсюда, обозначив через x массу сена (в тоннах), имеем пропорцию: $1{,}8 - 80\%$
$x - 100\%$
По правилу пропорции находим: $x = \dfrac{1{,}8 \cdot 100}{80} = 2{,}25$ т, т.е. 2250 кг сена.

Ответ: 2250

23 Постройте график кусочно-заданной функции $y = f(x)$, которая на каждом промежутке вида $(m; m+1]$, где m — произвольное целое число,

определена равенством: $f(x) = m$. Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает график $y = f(x)$ не менее, чем в девяти точках.

Решение.

1) Данная в условии функция является кусочно-постоянной: на каждом промежутке вида $(m; m+1]$, где $m \in Z$, её значение постоянно, а при переходе с одного промежутка на другой (соседний) её значение изменяется на 1. График этой функции имеет «ступенчатый» вид, его эскиз изображён на данном ниже рисунке 1.

рис.1

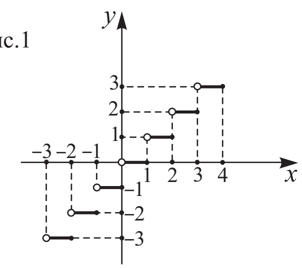
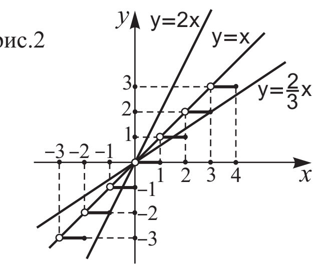


рис.2



2) Участок графика $y = f(x)$, соответствующий значениям аргумента x из промежутка $(m; m+1]$, будем называть «ступенькой с номером m» (все точки «ступеньки с номером m» лежат на прямой $y = m$). Заметим, что левые концы всех «ступенек» графика $y = f(x)$ лежат на прямой $y = x$. Поэтому если угловой коэффициент k прямой $y = kx$ меньше 1, то эта прямая может пересекать лишь те «ступеньки», которые расположены выше оси абсцисс, а если $k > 1$, то прямая $y = kx$ может пересекать лишь те «ступеньки», которые расположены ниже оси абсцисс. На рисунке 2 изображены прямая $y = x$, на которой лежат левые концы всех «ступенек», прямая $y = \dfrac{2}{3}x$, пересекающая «ступеньки с номерами 1 и 2», а также прямая $y = 2x$, пересекающая «ступеньки с номерами -1 и -2».

Если прямая $y = kx$ проходит через правый конец ступеньки с номером m, где $m \neq -1$, то $k = \dfrac{m}{m+1}$.

Заметим также, что если прямая $y = kx$ пересекает некоторую ступеньку с положительным номером m, то она пересекает и все ступеньки с номерами $1, 2, ..., m-1$ — это несложно увидеть «чисто геометрически» — из рисунка 2. Аналогично, если прямая $y = kx$ пересекает ступеньку с номером $m < -1$, то она пересекает и все ступеньки с номерами от m до -1 включая.

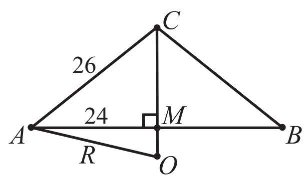
Из предыдущего абзаца следует, что если прямая $y = kx$ пересекает не менее девяти ступенек с положительными номерами, то она пересекает и ступеньку с номером 9, поэтому угловой коэффициент такой прямой не меньше, чем $\dfrac{9}{9+1} = 0{,}9$. Если же прямая $y = kx$ пересекает не менее девяти ступенек с отрицательными номерами, то она пересекает и ступеньку с номером -9, поэтому её угловой коэффициент не больше, чем $\dfrac{-9}{-9+1} = \dfrac{9}{8}$. Таким образом, все искомые значения k это $0{,}9 \leqslant k < 1$ и $1 < k < \dfrac{9}{8}$.

Ответ: $[0{,}9; 1) \cup (1; 9/8]$

24 Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 26, а основание равно 48. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

Решение.

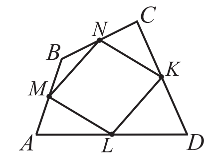
1) Пусть ABC – данный равнобедренный треугольник с основанием $AB = 48$, точка O – центр описанной окружности этого треугольника, а точка M – середина стороны AB, см. данный ниже рисунок. Так как $AC = BC$, то медиана CM является также и высотой. Из прямоугольного треугольника ACM имеем: $CM^2 = AC^2 - AM^2 = 26^2 - 24^2$, $CM = 10$ ($AC = 26$ – по условию, $AM = \dfrac{AB}{2} = 24$).



2) Искомый радиус описанной окружности обозначим через R, тогда $OM = CO - CM = R - 10$ (так как $AM > CM$, то $\angle ACM > 45^\circ \Rightarrow \angle ACB > 90^\circ$, поэтому точка O расположена вне треугольника ABC именно так, как показано по теореме Пифагора на данном выше рисунке). Из прямоугольного треугольника AOM по теореме Пифагора имеем: $AO^2 = AM^2 + OM^2$, $R^2 = 24^2 + (R-10)^2$, $576 + 100 - 20R = 0$, $R = 33{,}8$.

Ответ: $33{,}8$

25 Точки M, N, K, L – середины сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, см. данный справа рисунок. Докажите, что площадь четырёхугольника $MNKL$ равна половине площади четырёхугольника $ABCD$.



Решение.

1) Так как MN – средняя линия треугольника ABC, то треугольник MBN подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\dfrac{1}{2}$, см. рис. 1.

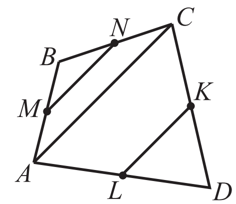


рис. 1

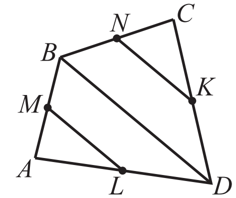


рис. 2

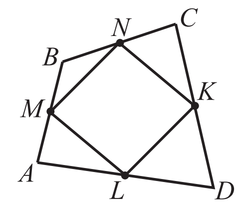


рис. 3

Отношения площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, поэтому площадь треугольника MBN равна $\dfrac{1}{4}$ площади треугольника ABC : $S_{MBN} = \dfrac{1}{4} S_{ABC}$. Аналогично, из подобия треугольников LDK и ADC имеем: $S_{LDK} = \dfrac{1}{4} S_{ADC}$. Следовательно,

$$S_{MBN} + S_{LDK} = \frac{1}{4}\left(S_{ABC} + S_{ADC}\right) = \frac{1}{4} S_{ABCD}.$$

2) Так как ML, NK – средние линии треугольников ABD и CBD, то

$$S_{AML} = \frac{1}{4} S_{ABD},\ S_{CNK} = \frac{1}{4} S_{CBD}, \text{ см. рис. 2,}$$

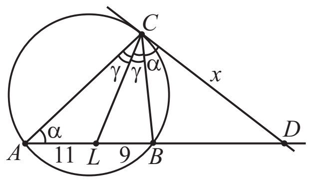
$$S_{AML} + S_{CNK} = \frac{1}{4}\left(S_{ABD} + S_{CBD}\right) = \frac{1}{4} S_{ABCD}.$$

3) Сложив почленно равенства $S_{MBN} + S_{LDK} = \dfrac{1}{4} S_{ABCD}$ и $S_{AML} + S_{CNK} = \dfrac{1}{4} S_{ABCD}$, получим: $S_{MBN} + S_{LDK} + S_{AML} + S_{CNK} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$. Заметим, что площадь четырёхугольника $ABCD$ равна сумме площадей составляющих его четырёхугольника $MNKL$ и треугольников MBN, LDK, AML, CNK. Поэтому $S_{ABCD} = S_{MNKL} + \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$, откуда $S_{MNKL} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD}$, что и требовалось доказать.

$\boxed{26}$ Биссектриса CL треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AL = 11$ и $BL = 9$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через точку C, пересекает прямую AB в точке D. Найдите длину отрезка CD.

Решение.

1) Пусть $CD = x$ − искомая величина, и $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACL = \gamma$. Так как градусная мера угла между хордой и касательной равна половине градусной меры стягиваемой этой хордой дуги, то $\angle BCD = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BC} = \angle BAC$, т.е. $\angle BCD = \alpha$, см. данный ниже рисунок.



2) Заметим, что $\angle DLC = \angle LAC + \angle ACL = \alpha + \gamma$ − как внешний угол треугольника ACL при вершине L. А поскольку $\angle DCL = \angle BCD + \angle BCL = \alpha + \gamma$, то $\angle DCL = \angle DLC$ и, значит, треугольник DCL равнобедренный − $DC = DL$.

3) Так как $DL = DC = x$, то $DB = DL - BL = x - 9$, $DA = DL + AL = x + 11$. По свойству касательной имеем: $CD^2 = DB \cdot DA$ (квадрат касательной равен произведению отрезков секущей). Отсюда получаем следующее уравнение для нахождения x:

$x^2 = (x-9)(x+11)$, $x^2 = x^2 + 2x - 99$, $2x = 99$, откуда $x = 49{,}5$.

Ответ: 49,5

Тест №11

$\boxed{21}$ Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 = 3y + 7, \\ x^2 + 2 = 3y + y^2. \end{cases}$

Решение.

Заменяя второе уравнение системы разностью второго и первого уравнений, получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} x^2 = 3y + 7 \\ 2 = y^2 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3y + 7 \\ y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3y + 7 \\ y = 3 \text{ или } y = -3. \end{cases}$$

Если $y = -3$, то уравнение $x^2 = 3y + 7$ принимает вид: $x^2 = -2$ − решений нет.

Если $y = 3$, то уравнение $x^2 = 3y + 7$ принимает вид: $x^2 = 16$ − корни уравнения $x = -4$ и $x = 4$.

Таким образом, все решения исходной системы это $y = 3, x = -4$ и $y = 3, x = 4$.

Ответ: $(-4; 3); (4; 3)$

$\boxed{22}$ Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 10 км, одновременно в одном направлении стартовали два мотоциклиста. Скорость первого мотоциклиста равна 90 км/ч, и через 50 минут после старта он опережал второго мотоциклиста на один круг. Найдите скорость второго мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Поскольку 50 минут составляют 5/6 часа, то за 50 минут первый мотоциклист проехал 90 км/ч $\cdot \frac{5}{6}$ ч $= 75$ км. Из условия следует, что второй мотоциклист проехал за это же время на один круг меньше, т.е. он проехал 65 км.

Так как второй мотоциклист проехал за 50 минут 65 км, то его скорость равна 65 км : $\frac{5}{6}$ ч $= 78$ км/ч.

Ответ: 78

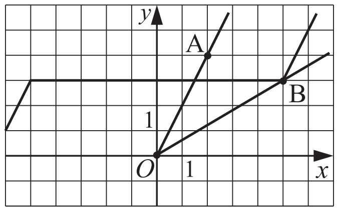
$\boxed{23}$ Постройте график кусочно заданной функции:

$$y = \begin{cases} 2x + 13 \text{ при } x < -5, \\ 3 \text{ при } -5 \leqslant x \leqslant 5, \\ 2x - 7 \text{ при } x > 5. \end{cases}$$

Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает этот график в трёх различных точках.

Решение.

График данной функции состоит из трёх частей, каждая из которых представляет собой участок некоторой прямой и имеет с прямой $y = kx$ не более одной общей точки. Поэтому график данной функции имеет с прямой $y = kx$ ровно три общие точки лишь в том случае, если каждая из трёх его частей имеет общую точку с этой прямой. Последнее может быть выполнено только в том случае, если прямая $y = kx$ составляет с осью Ox угол больший, чем прямая OB, но меньший, чем прямая OA, параллельная прямой $y = 2x - 7$, см. данный ниже рисунок (если одно из указанных условий не выполнено, то прямая $y = kx$ не пересекает один из двух участков графика: при $-5 \leqslant x \leqslant 5$ или $x > 5$).



Легко видеть, что если прямая $y = kx$ лежит между прямыми OB и OA, то она действительно пересекает все три участка графика, изображённого на рисунке. Таким образом, искомые значения k — это все числа, которые больше углового коэффициента прямой OB, но меньше углового коэффициента прямой OA. Угловой коэффициент прямой OA равен 2 (т.к. эта прямая параллельна прямой $y = 2x - 7$). Угловой коэффициент прямой OB можно вычислить по формуле: $\dfrac{y_B}{x_B}$, где x_B, y_B — координаты вектора OB. Точка B имеет координаты $(5; 3)$, поэтому координаты вектора OB равны $x_B = 5 - 0 = 5$, $y_B = 3 - 0 = 3$, и по указанной выше формуле получаем, что угловой коэффициент прямой OB равен 0,6.

Итак, все искомые k — это $k \in (0{,}6; 2)$.

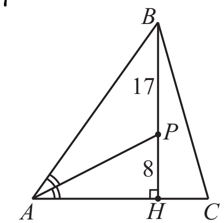
24 В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает высоту BH в точке P, при этом $BP : PH = 17 : 8$. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC, если $BC = 60$.

Решение.

1) Для нахождения радиуса R описанной окружности воспользуемся теоремой синусов: $2R = \dfrac{BC}{\sin\angle A}$. Длина стороны BC известна по условию ($BC = 60$), поэтому для вычисления R нам достаточно найти $\sin\angle A$.

2) Так как AP — биссектриса треугольника ABH, то $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{PH}{PB}$, см. данный ниже рисунок. По условию, $BP : PH = 17 : 8$ и, значит, $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{PH}{PB} = \dfrac{8}{17}$. Заметим, что поскольку $\angle AHB = 90°$, то

$\dfrac{AH}{AB} = \cos\angle A$. Таким образом, $\cos\angle A = \dfrac{8}{17}$, откуда находим, что $\sin\angle A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \dfrac{15}{17}$.



3) Подставляя $BC = 60$ и $\sin\angle A = \dfrac{15}{17}$ в равенство $2R = \dfrac{BC}{\sin\angle A}$, получаем, что $2R = 68$, $R = 34$.

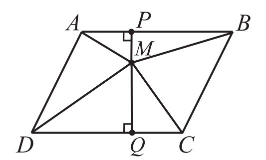
Ответ: 34

25 Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольно точку M. Докажите, что сумма площадей треугольников ABM и CDM равна сумме площадей треугольников BCM и ADM.

Решение.

1) Пусть S — площадь параллелограмма $ABCD$, S_{ABM}, S_{CDM}, S_{BCM} и S_{ADM} — площади треугольников ABM, CDM, BCM и ADM соответственно. Заметим, что поскольку $S = S_{ABM} + S_{CDM} + S_{BCM} + S_{ADM}$, то равенство $S_{ABM} + S_{CDM} = S_{BCM} + S_{ADM}$, которое нам необходимо доказать, равносильно равенству $S_{ABM} + S_{CDM} = \dfrac{1}{2}S$.

2) Докажем равенство $S_{ABM} + S_{CDM} = \dfrac{1}{2}S$. Пусть MP и MQ — перпендикуляры, проведённые из точки M к сторонам AB и CD, см. рисунок. Тогда $S_{ABM} = \dfrac{1}{2}AB \cdot MP$, $S_{CDM} = \dfrac{1}{2}CD \cdot MQ$. Так как $AB = CD$, то сложив два предыдущих равенства, получим: $S_{ABM} + S_{CDM} = \\ = \dfrac{1}{2}AB \cdot (MP + MQ)$.



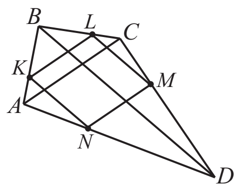
Точки P, Q и M лежат на одной прямой (т.к. из точки M можно провести лишь один перпендикуляр к параллельным прямым AB и CD).

Поэтому $MP+MQ=PQ-$ расстояние между прямыми AB и CD. Но расстояние между прямыми AB и CD равно высоте h параллелограмма $ABCD$. Поэтому $S_{ABM}+S_{CDM}=\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}S$, ч.т.д.

$\boxed{26}$ На сторонах четырёхугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M, N так, что четырёхугольник $KLMN$ является ромбом, стороны которого параллельны диагоналям AC и BD. Найдите отношение площади $KLMN$ к площади $ABCD$, если $AC:BD=1:2$.

Решение.

Пусть точки K, L, M, N расположены на сторонах четырёхугольника $ABCD$ так, как показано на данном ниже рисунке.



Заметим, что поскольку прямые KL и MN параллельны диагонали AC (по условию), то треугольники BKL и DNM подобны треугольникам BAC и DAC соответственно. Аналогично, из условия параллельности прямых LM и KN диагонали BD, следует подобие двух пар треугольников: $\triangle CLM\sim\triangle CBD$ и $\triangle AKN\sim\triangle ABD$. Если вычислить коэффициенты подобия вышеуказанных пар треугольников и воспользоваться тем, что отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, то можно найти отношение суммы площадей $\triangle BKL$ и $\triangle DNM$ к площади четырёхугольника $ABCD$, а также отношение суммы площадей $\triangle AKN$ и $\triangle CLM$ к площади $ABCD$. Тогда искомое отношение площади $KLMN$ к площади $ABCD$ будет равно $1-p_1-p_2$, где $p_1=\dfrac{S_{BKL}+S_{DNM}}{S_{ABCD}}$, $p_2=\dfrac{S_{AKN}+S_{CLM}}{S_{ABCD}}$.

Реализуем намеченный выше план.

1) Пусть $BK:AB=k$. Из подобия треугольников BKL и BAC имеем: $\dfrac{KL}{AC}=\dfrac{BK}{AB}=k$. А из подобия треугольников AKN и ABD имеем: $\dfrac{KN}{BD}=\dfrac{AK}{AB}=\dfrac{AB-BK}{AB}=1-k$. Из равенств $\dfrac{KL}{AC}=k$ и $\dfrac{KN}{BD}=1-k$ получаем, что $KL=AC\cdot k$, $KN=BD\cdot(1-k)$. А поскольку $KLMN$ — ромб, то $KL=KN$ и, значит, $AC\cdot k=BD\cdot(1-k)$. Отсюда получаем, что $\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{1-k}{k}=\dfrac{1}{2}$ (по условию $AC:BD=1:2$). Из последнего равенства находим, что $k=\dfrac{2}{3}$.

2) Таким образом, коэффициент подобия треугольников BKL и BAC, а также треугольников DNM и DAC равен $\dfrac{2}{3}$ ($BK:BA=DN:DA$, поэтому коэффициенты подобия двух вышеуказанных пар треугольников равны). Аналогично, коэффициенты подобия двух пар треугольников AKN, ABD и CLM, CBD равны $AK:AB=1-k=\dfrac{1}{3}$.

3) Так как отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия, то

$$S_{BKL}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot S_{BAC}=\frac{4}{9}S_{BAC},\ S_{DNM}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot S_{DAC}=\frac{4}{9}S_{DAC},$$

$$S_{AKN}=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot S_{ABD}=\frac{1}{9}S_{ABD},\ S_{CLM}=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot S_{CBD}=\frac{1}{9}S_{CBD}.$$

Сложив почленно первое равенство со вторым, а третье с четвёртым, получим: $S_{BKL}+S_{DNM}=\dfrac{4}{9}\left(S_{BAC}+S_{DAC}\right)=\dfrac{4}{9}S_{ABCD}$,

$$S_{AKN}+S_{CLM}=\frac{1}{9}\left(S_{ABD}+S_{CBD}\right)=\frac{1}{9}S_{ABCD}.$$

Так как $S_{KLMN}=S_{ABCD}-S_{BKL}-S_{DNM}-S_{AKN}-S_{CLM}$, то $\dfrac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}}=1-\dfrac{S_{BKL}+S_{DNM}}{S_{ABCD}}-\dfrac{S_{AKN}+S_{CLM}}{S_{ABCD}}=1-\dfrac{4}{9}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{4}{9}$.

Ответ: $4:9$